(1)

## Mathematische Grundfunktion einer Skala

Den Eindruck eines natürlichen Wohlklanges vermitteln alle Folgen reiner Töne (Sinustöne), die dem Prinzip einfacher Exponentialfunktionen gebildet sind:

$$\frac{f_n}{f_0} = K^{\frac{n}{s}}$$

mit
- $f_0$ Frequenz des Grundtones der Folge
- $f_n$ " " n-ten Tones " "
- $n$ Ordnungszahl " " " " (ganzzahlig)
- $s$ Gesamtzahl der Tonstufen " "
- $K$ Basis

Die Einhaltung dieser Funktion bedeutet gleichzeitig eine für Tasteninstrumente geeignete (temperierte) Stimmung.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} K = 2 \text{ (Oktavsystem)} \\ s = 12 \end{array}\right\} \quad \frac{f_n}{f_0} = 2^{\frac{n}{12}}$$

→ Temperierte Stimmung des 12-stufigen Tonsystems.

2. Beispiel: Krenek, Pfingstoratorium „Spiritus intelligentiae, Sanctus"

$$\frac{f_n}{f_0} = 2^{\frac{n}{13}} \quad \text{mit „Zentralton" 330 Hz}$$

3. Beispiel: Arabische Skala „Saba" würde temperiert ungefähr $\frac{f_n}{f_0} \approx 2{,}4^{\frac{n}{30}}$ sein.

# Nichtlineare Erscheinungen

## 1. Obertöne (Harmonische)

Natürliche Instrumental- und Vokaltöne sind im allgemeinen keine Sinustöne (reinen Töne); sie enthalten Oberschwingungen.
Im Normalfall sind diese Oberschwingungen Harmonische, d.h. ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz:

$$f_q = q f_0 \qquad (q \text{ ganzzahlig} > 1).$$

Seltener sind nichtharmonische „Nebentöne".

Das Auftreten der Harmonischen ist die Folge nichtlinearer Verzerrungen, die verschiedener Herkunft sein können: Instrument, Übertrager (mechanisch oder elektrisch), Ohr.

Allgemeine mathematische Behandlung:

Grundton $\quad s_0 = A_0 \cos \alpha_0$ mit $\alpha_0 = 2\pi f_0 t$

Hörergebnis $\quad s = \sum_{q=1}^{\infty} d_q s_0^q$

$$= d_1 s_0 + d_2 s_0^2 + d_3 s_0^3 \ldots\ldots$$

mit $A_0$ Amplitude des Grundtones

$t$ Zeit

$d_q$ Dämpfung der jeweiligen Frequenz

Quadratische Verzerrungen (ausgedrückt durch Glieder mit geradzahligen Exponenten) ergeben geradzahlige Harmonische, kubische Verzerrungen (ungeradzahl. Expon.) ergeben ungeradzahlige Harmonische.

## 2. Intermodulationsprodukte
## (Differenztöne, Kombinationstöne)

Klänge (im einfachsten Fall aus zwei Tönen bestehend) erzeugen infolge nichtlinearer Verzerrungen neben den Harmonischen der Einzeltöne Intermodulationsprodukte, die in ihrer einfachsten Form als Differenztöne bezeichnet werden.
Für einen Klang aus zwei 2 Tönen mit den Frequenzen $f_1$ und $f_2$ ergibt sich eine Familie von Intermodulationstönen, deren Frequenzen sich durch

$$p f_1 \pm q f_2$$

(mit $p, q$ ganzzahlig $> 0$)

ausdrücken lassen (vergl. [8]).
Quadratische Verzerrungen ergeben Intermodulationsfrequenzen, bei denen die Summe aus $p$ und $q$ geradzahlig ist, kubische Verzerrungen dagegen Frequenzen mit einer ungeradzahligen Summe von $p$ und $q$.
Nach E. Zwicker hat der quadratische Anteil eine streng parabelförmige Abhängigkeit von der Amplitude, während der kubische Anteil bei kleinen Schalldrücken nur unwesentlich abnimmt [7]. Damit kommt dem kubischen Anteil die größere Bedeutung zu!!

## Erkennbarkeit von Intervallen

Oberhalb von etwa 1000 Hz läßt die Fähigkeit des menschlichen Gehörs (auch des geschulten), Intervalle klar zu erkennen, schnell nach. Die Möglichkeit, Harmonische einem Grundton sicher zuzuordnen („natürliche Obertonreihe"), ist daher begrenzt. Das gleiche gilt naturgemäß für Intermodulationstöne im Bereich höherer Frequenzen, nicht dagegen für die tieffrequenten Intermodulationstöne (Differenztöne). Die klarste Erkennbarkeit liegt vor bei Intermodulationsprodukten in unmittelbarer Nachbarschaft des ursprünglichen Klanges.

## Ableitung einer Skala aus den Harmonischen

Forderung: Harmonische von Grundton ($f_0$) und gesuchtem Ton ($f_x$) sollen identisch sein (Klang mit konsonierenden Harmonischen):

$$q \cdot f_x = p \cdot f_0$$

mit $p \geq 1$, $0 < q \leq p$

Begrenzung wegen Verringerung der Erkennbarkeit: 5. Harmonische

Resultat:

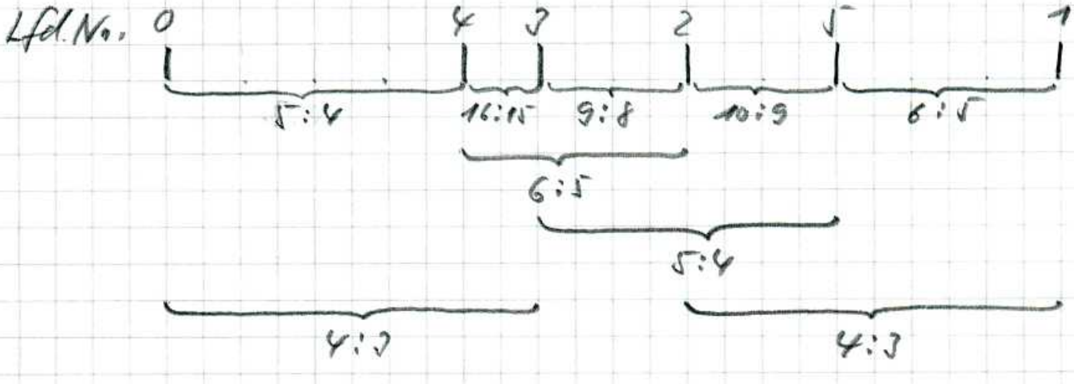
| $p$ | $q$ | $\frac{f_x}{f_0}$ | $\frac{f_x'}{f_0}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 2 |
| | 2 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 3/2 |
| | 2 | 3/2 | 3/2 |
| | 3 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 4 | 2 |
| | 2 | 2 | 2 |
| | 3 | 4/3 | 4/3 |
| | 4 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 5 | 5/4 |
| | 2 | 5/2 | 5/4 |
| | 3 | 5/3 | 5/3 |
| | 4 | 5/4 | 5/4 |
| | 5 | 1 | 1 |

(Umrechnung in den Raum 1...2, da offensichtlich oberhalb 2 nur Wiederholungen)

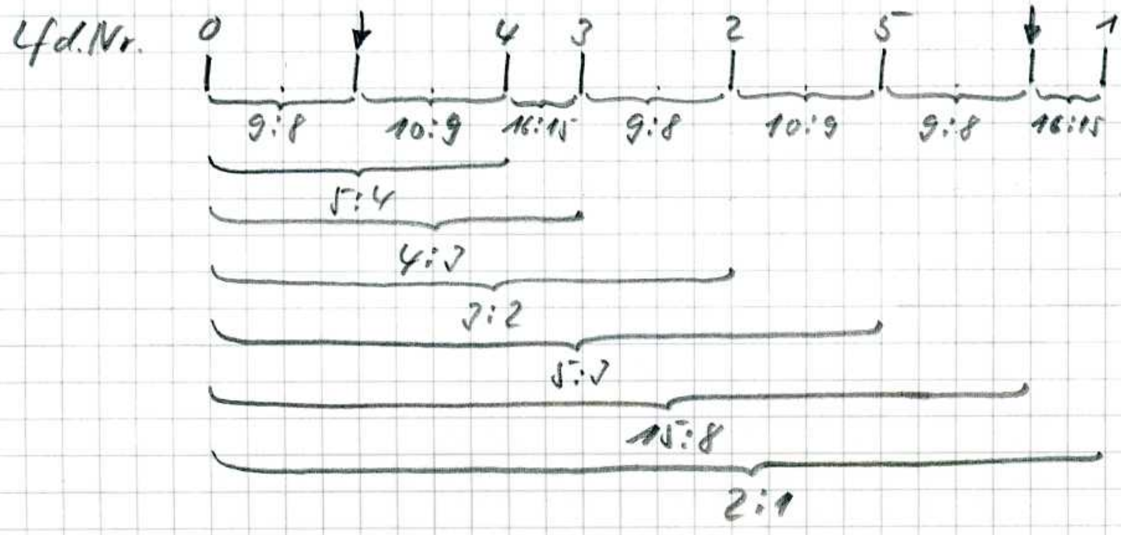
Zusammenfassung:

| Lfd.Nr. | Frequenzverhältnis zu Grundton |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | $3/2 = 1{,}500\overline{0}$ |
| 3 | $4/3 = 1{,}333\overline{3}$ |
| 4 | $5/4 = 1{,}250\overline{0}$ |
| 5 | $5/3 = 1{,}666\overline{6}$ |

Die gefundenen Töne ergeben eine Skala, bei der die Forderung nach Konsonanz zwar erfüllt ist, die aber noch Lücken (Hiate) aufweist:



Hiate (5:4, 6:5) werden nach vorhandenem Beispiel aufgefüllt.
Zusätzliche Symmetriebedingung: Beide 4:3-Räume (Tetrachorde) sollen gleichartig aufgebaut sein.
Endresultat: (↓ Auffüllungen)




→ <u>Dur-Skala</u>

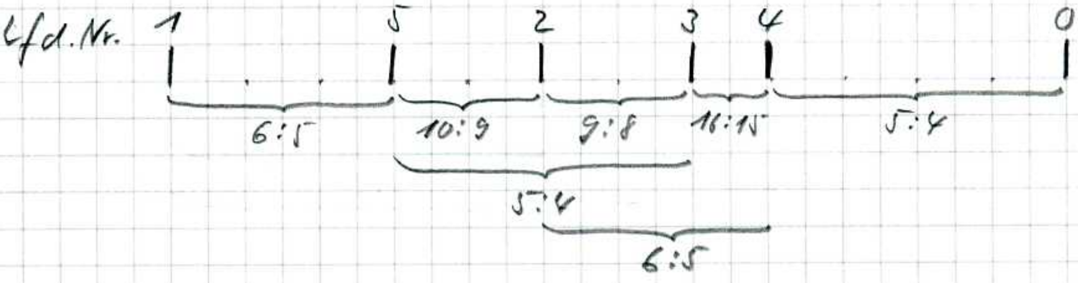
Forderung der Konsonanz bei Sekunde und Septime (Auffüllungen) nicht eingehalten.

<u>Kritik</u>: Abbruch nach 5. Harmonischer willkürlich.
Zulassung Harmonischer höherer Ordnung macht Schwierigkeiten:

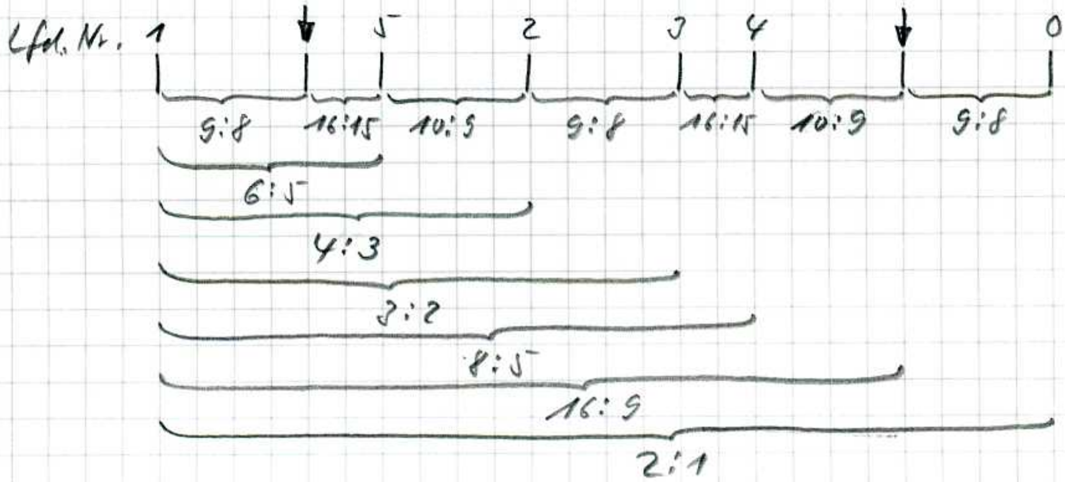
6. → kleine Terz
7. → unbrauchbare Intervalle

(vergl. [1])

Bei Inversion des Verfahrens (Aufbau der Skala mit den Komplementärintervallen) ergibt sich




Auffüllung (↓) der Hiate nach gegebenem Beispiel




führt zur <u>äolischen Mollskala</u>.

<u>Kritik</u>: Infolge der Inversion ein künstliches Gebilde, das erst nachträglich durch die chromatische Skala gerechtfertigt wird.

## Ableitung einer Skala aus den Intermodulationstönen

Forderung: Konsonanz zwischen Intermodulationstönen insbesondere in der Nähe des Grundintervalls $f_0, f_x$:

$$p f_0 - q f_x = f_x \quad \text{oder} \quad p \cdot f_x - q \cdot f_0 = f_0$$

$$\rightarrow \quad \frac{f_x}{f_0} = \frac{p}{q+1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f_x}{f_0} = \frac{q+1}{p}$$

mit $p, q \geq 1$

Begrenzung: Produkte 5. Ordnung

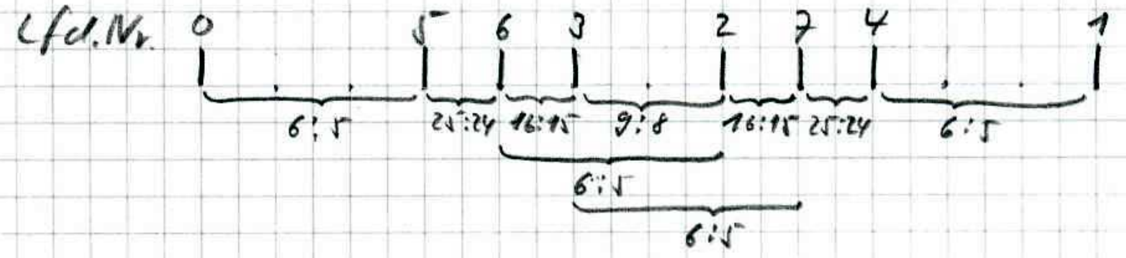
Resultat:

| | | $\frac{f_x}{f_0}$ | | $\frac{f_x'}{f_0}$ umgerechnet in den Raum 1...2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $\frac{p}{q+1}$ | $\frac{q+1}{p}$ | $\frac{p}{q+1}$ | $\frac{q+1}{p}$ |
| 1 | 1 | 1/2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | 2/3 | 3/2 | 4/3 | 3/2 |
| 3 | 1 | 3/2 | 2/3 | 3/2 | 4/3 |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 3 | 3/4 | 4/3 | 3/2 | 4/3 |
| 4 | 1 | 2 | 1/2 | 2 | 1 |
| | 2 | 4/3 | 3/4 | 4/3 | 3/2 |
| | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 4 | 4/5 | 5/4 | 8/5 | 5/4 |
| 5 | 1 | 5/2 | 2/5 | 5/4 | 8/5 |
| | 2 | 5/3 | 3/5 | 5/3 | 6/5 |
| | 3 | 5/4 | 4/5 | 5/4 | 8/5 |
| | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 5 | 5/6 | 6/5 | 5/3 | 6/5 |

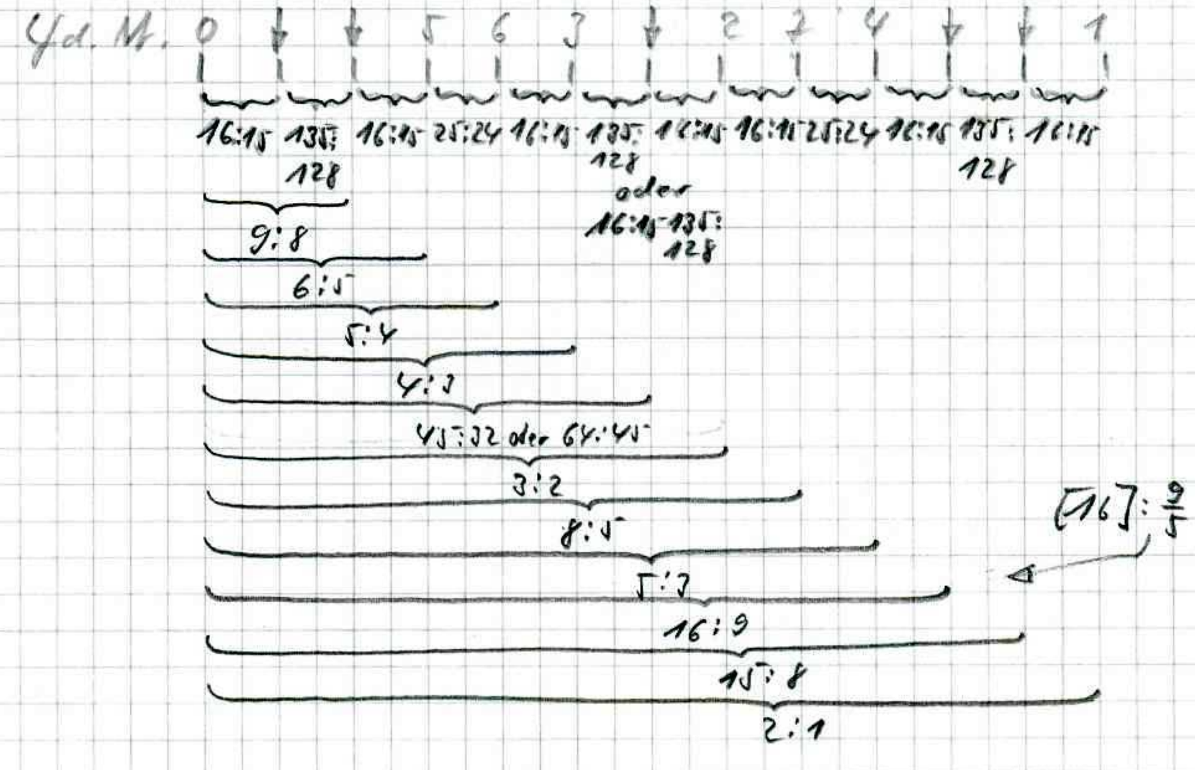
Zusammenfassung:

| Lfd. Nr. | Frequenzverh. z. Grundton |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 3/2 = 1,5000 |
| 3 | 4/3 = $1{,}333\overline{3}$ |
| 4 | 5/3 = $1{,}666\overline{6}$ |
| 5 | 6/5 = 1,2000 |
| 6 | 5/4 = 1,2500 |
| 7 | 8/5 = 1,6000 |

Die folgende Skala erfüllt die Konsonanzforderung:




Auffüllung nach dem Prinzip des gegebenen Beispiels und der Symmetrie ergibt




→ <u>chromatische Skala</u> mit einem doppeldeutigen Intervall (Tritonus), da völlige Symmetrie nicht erreichbar.

<u>Kritik</u>: Plausibelste Ableitung, da Intermodulationstöne in der Nähe der Grundintervalls besonders gut einnorden.

Verhältnis der Halbtöne

$$\frac{16}{15} : \frac{135}{128} : \frac{25}{24} \approx 11 : 9 : 7$$

## Temperierbarkeit der 12-stufigen Skala

Die Skala, von der mit der chromatischen Form bereits 12 Stufen vorhanden sind, läßt sich mit

$$\frac{f_n}{f_0} = 2^{\frac{n}{12}}$$

mit relativ geringen Abweichungen (< 1%) auch in nur 12 Stufen temperiert darstellen. Das ist kein Naturgesetz, sondern ein glücklicher Zufall! (Beweis: nächsthöhere brauchbare Teilungen erst bei 19 (Costeley, M. Praetorius [16], Salinas, McClure [3]), 22 (indisch), 31 (Vicentino, Mersenne [16], Huygens [3], Fokker), 41 (Janko [10], Mercator [16]) oder sogar 53 (Mercator [10], Bosanquet, Helmholtz [4]) Stufen.)

Die Temperierbarkeit in nicht allzu vielen Stufen bedeutet außerdem (unabhängig vom Vollzug der Temperierung), daß die Skala die Naturforderung der Exponentialfunktion hinreichend erfüllt.

| Stimmung $n$ | $f_n/f_0$ rein | $2^{\frac{n}{12}}$ | $n$ | Huygens/Fokker $2^{\frac{n}{31}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1:1 = 1,0000 | 1,0000 | 0 | 1,0000 |
| 1 | 16:15 = 1,0666 | 1,0595 | 3 | 1,0640 |
| 2 | 9:8 = 1,1250 | 1,1225 | 5 | 1,1183 |
| 3 | 6:5 = 1,2000 | 1,1892 | 8 | 1,1958 |
| 4 | 5:4 = 1,2500 | 1,2599 | 10 | 1,2506 |
| 5 | 4:3 = 1,3333 | 1,3348 | 13 | 1,3373 |
| 6 | 45:32 = 1,40625<br>64:45 = 1,4222 | 1,4142 | 15 | 1,3985 |
| 7 | 3:2 = 1,5000 | 1,4983 | 18 | 1,4956 |
| 8 | 8:5 = 1,6000 | 1,5874 | 21 | 1,5993 |
| 9 | 5:3 = 1,6666 | 1,6818 | 23 | 1,6724 |
| 10 | 16:9 = 1,7777 | 1,7818 | 26 | 1,7885 |
| 11 | 15:8 = 1,8750 | 1,8878 | 28 | 1,8703 |
| 12 | 2:1 = 2,0000 | 2,0000 | 31 | 2,0000 |

## Bildungsgesetze für eine Skala

Eine Skala muß die beiden folgenden, untereinander völlig unabhängigen Gesetze gleichzeitig (höchstzulässige Abweichung der Intervalle 1%) erfüllen:

1. Die Skala ist so aufzubauen, daß der Großteil der vorkommenden Intervalle mit den von ihm erzeugten Intermodulationstönen konsoniert.

   Mathematisch:

$$\frac{f_x}{f_0} = \frac{p}{q+1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f_x}{f_0} = \frac{q+1}{p}$$

   mit $p, q$ ganzzahlig $\geq 1$

   Die so entstehende Skala ist chromatisch.

   Eine formelle Ableitung aus den Obertönen des Einzeltones (physikalisch weniger gerechtfertigt) und die Invertierung dieses Verfahrens führen zu diatonischen Skalen, deren Zusammenlegung wiederum die chromatische Skala ergibt.

   (Konsonanzprinzip)

2. Die Skala muß, um der Forderung nach natürlichem Wohlklang zu entsprechen, als Exponentialfunktion aufgebaut werden:

$$\frac{f_n}{f_0} = K^{\frac{n}{v}}$$

Eine exakte Erfüllung dieser Forderung bedeutet gleichzeitig die Temperierung.
(Distanzprinzip)

# Ableitung einer Skala unter der Voraussetzung von ungeradzahligen Harmonischen aus den Intermodulationstönen

Forderung: $\frac{f_x}{f_0} = \frac{p}{q+1}$ bzw. $\frac{f_x}{f_0} = \frac{q+1}{p}$

mit $p, q$ ganzzahlig $\geq 1$

und $p$ ungerade

$p+q$ " , d.h. $q$ gerade

$q < p$

Begrenzung: Produkte 5. Ordnung

Resultat:

| | | $\frac{f_x}{f_0}$ | | $\frac{f_x'}{f_0}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $\frac{p}{q+1}$ | $\frac{q+1}{p}$ | $\frac{p}{q+1}$ | $\frac{q+1}{p}$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | $\frac{1}{3}$ | 3 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 3 | $\frac{1}{3}$ | 3 | 1 |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 4 | $\frac{3}{5}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{9}{5}$ | $\frac{5}{3}$ |
| | 6 | $\frac{3}{7}$ | $\frac{7}{3}$ | $\frac{9}{7}$ | $\frac{7}{3}$ |
| | 8 | $\frac{1}{3}$ | 3 | 1 | 3 |
| 5 | 2 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{9}{5}$ |
| | 4 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 6 | $\frac{5}{7}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{15}{7}$ | $\frac{7}{5}$ |
| | 8 | $\frac{5}{9}$ | $\frac{9}{5}$ | $\frac{15}{7}$ | $\frac{9}{5}$ |
| 7 | 2 | $\frac{7}{3}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{9}{7}$ |
| | 4 | $\frac{7}{5}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{15}{7}$ |
| | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 8 | $\frac{7}{9}$ | $\frac{9}{7}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{9}{7}$ |

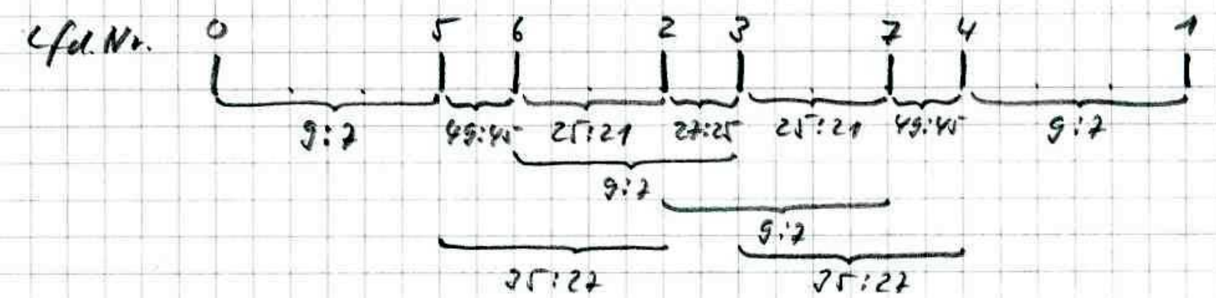
| $p$ | $q$ | $\frac{f_x}{f_0}$: $\frac{p}{q+1}$ | $\frac{f_x}{f_0}$: $\frac{q+1}{p}$ | $\frac{f_x'}{f_0}$: $\frac{p}{q+1}$ | $\frac{f_x'}{f_0}$: $\frac{q+1}{p}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 2 | 3 | $\frac{1}{3}$ | 3 | 1 |
| | 4 | $\frac{9}{5}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{9}{5}$ | $\frac{5}{3}$ |
| | 6 | $\frac{9}{7}$ | $\frac{7}{9}$ | $\frac{9}{7}$ | $\frac{7}{3}$ |
| | 8 | 1 | 1 | 1 | 1 |

(Begrenzung gerechtfertigt, da keine neuen Anteile durch 4. und 5. Ordnung)

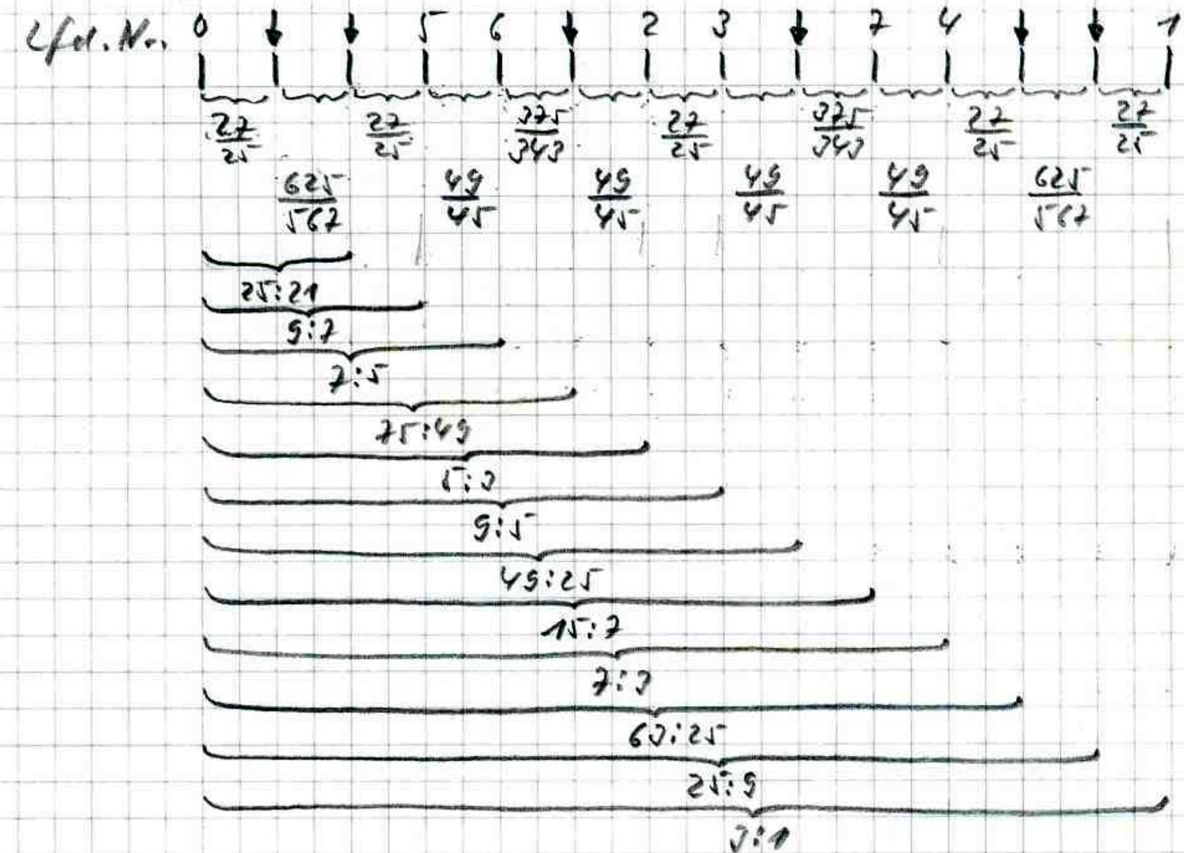
Zusammenfassung:

| Lfd. Nr. | Frequenzverhältnis zum Grundton |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 3 |
| 2 | $5/3 = 1{,}666\bar{6}$ |
| 3 | $9/5 = 1{,}8000$ |
| 4 | $7/3 = 2{,}333\bar{3}$ |
| 5 | $9/7 = 1{,}2857$ |
| 6 | $7/5 = 1{,}4000$ |
| 7 | $15/7 = 2{,}1428$ |

Die folgende Skala erfüllt die Konsonanzanforderung:




Auffüllung nach dem Prinzip des gegebenen Beispiels und der Symmetrie ergibt:




Diskussion: Völlig symmetrische Skala ohne Doppeldeutigkeiten.

Verhältnis der Halbtöne

$$\frac{625}{567} : \frac{375}{343} : \frac{49}{45} : \frac{27}{25} = 24:22:21:19$$

## Bildung diatonischer Skalen unter der Voraussetzung ungeradzahliger Harmonischer

Rein formelle Bildung.

Forderung:
$$\frac{f_x}{f_0} = \frac{p}{q}$$
mit $p \geq 1$

$0 < q \leq p$

$p, q$ ungerade

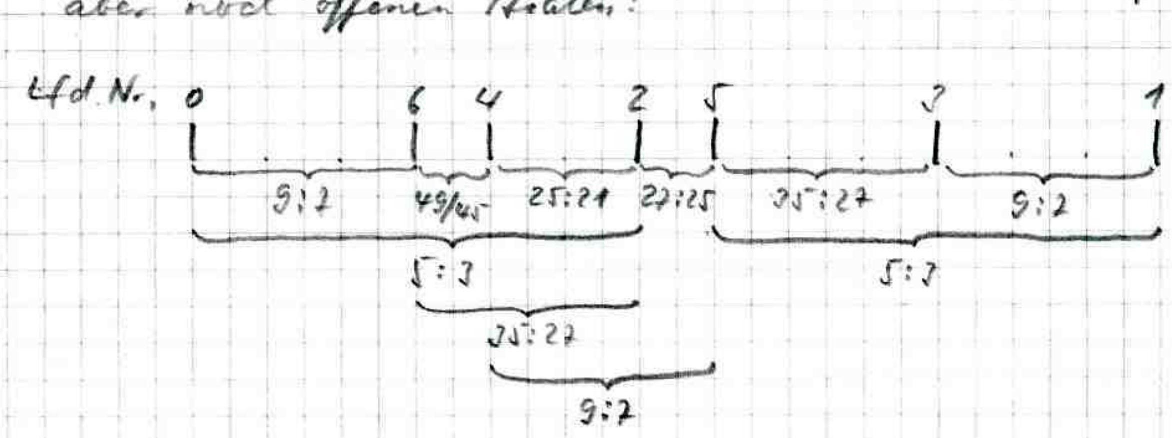
Begrenzung: 5. Ordnung.

| $p$ | $q$ | $\frac{f_x}{f_0}$ | $\frac{f_x'}{f_0}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 3 |
| | 3 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 5 | 5/3 |
| | 3 | 5/3 | 5/3 |
| | 5 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 7 | 7/3 |
| | 3 | 7/3 | 7/3 |
| | 5 | 7/5 | 7/5 |
| | 7 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 9 | 3 |
| | 3 | 3 | 3 |
| | 5 | 9/5 | 9/5 |
| | 7 | 9/7 | 9/7 |
| | 9 | 1 | 1 |

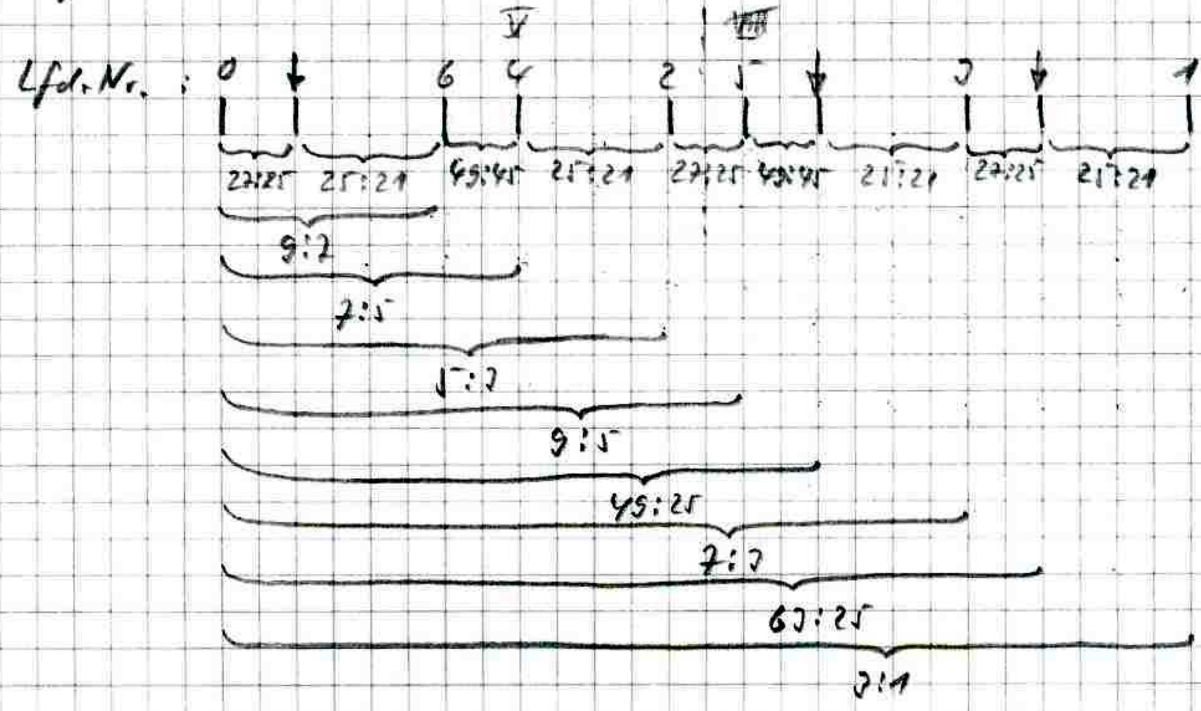
Zusammenfassung

| Lfd. Nr. | Frequenzverh. zum Grundton |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 3 |
| 2 | $5/3 = 1{,}666\bar{6}$ |
| 3 | $7/3 = 2{,}333\bar{3}$ |
| 4 | $7/5 = 1{,}4000$ |
| 5 | $9/5 = 1{,}8000$ |
| 6 | $9/7 = 1{,}2857$ |

→ Skala mit Erfüllung der Konsonanzforderung, aber noch offenen Hiaten:



Auffüllung nach gegebenem Beispiel und bei Erfüllung der Forderung nach gleichartigem Aufbau der 5:7-Räume:




→ $\boxed{\text{„Dur I"}}$ „Γ"

„Dekade" bestehend aus zwei gleichartigen „Pentachorden".

Ganztöne 25 : 21

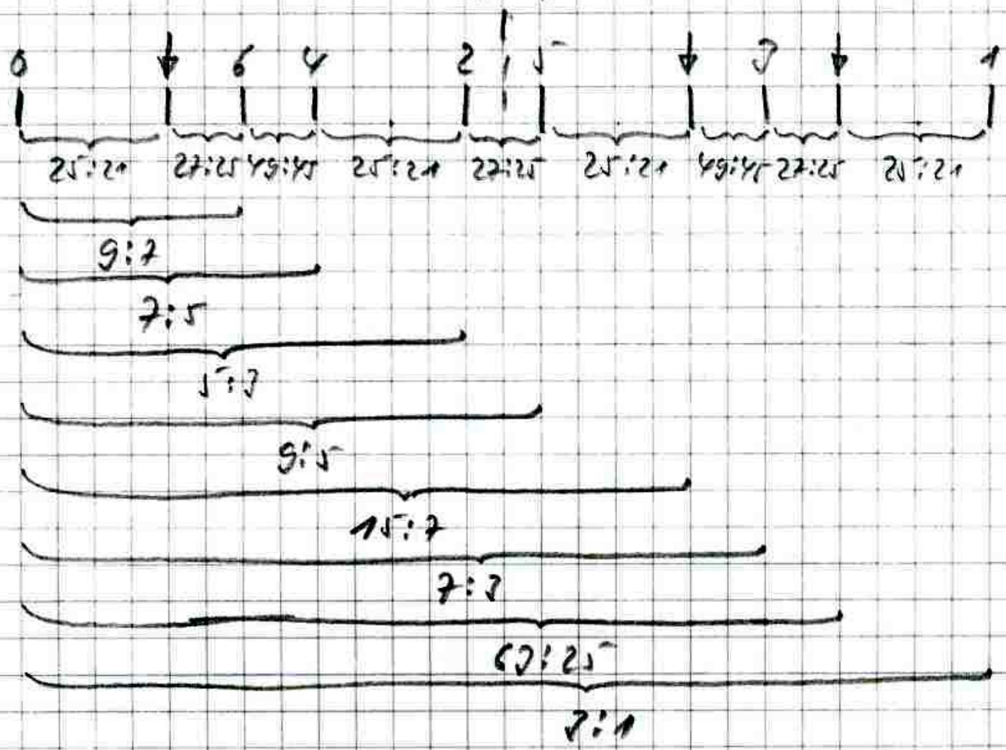
Halbtöne abwechselnd 27 : 25 und 49 : 45

I – V – VIII

I – VII – XI

Ebenfalls möglich:

Zusätzliche Symmetrisierung der Pentachorde zu ihrer „Trennfuge“:




→ $\boxed{\text{„Dur } \underline{II}\text{“}}$

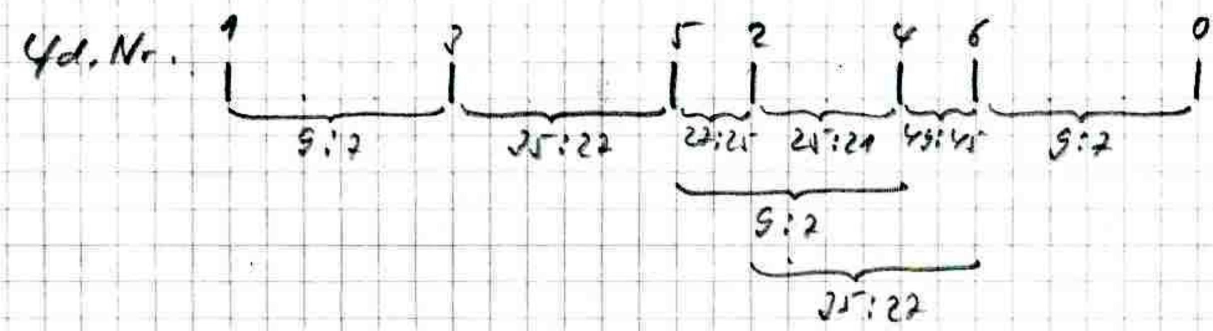
$\underline{I}$ - $\underline{V}$ - $\underline{VIII}$

$\underline{I}$ - $\underline{VII}$ - $\underline{XI}$

$\underline{I}$ - $\underline{IV}$ - $\underline{X}$

Die formelle Inversion ergeben sich folgende Komplementärintervalle

| Lfd. Nr. | Ausgangs-intervall | Komplementär-intervall |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 1 |
| 2 | 5/3 | 9/5 |
| 3 | 7/3 | 9/7 |
| 4 | 7/5 | 15/7 |
| 5 | 9/5 | 5/3 |
| 6 | 9/7 | 7/3 |



Auffüllung analog zu „Dur I" ergibt

| Stufe | I | | II | | III | | IV | | V | | VI | | VII | | VIII | | IX | | X |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lfd. Nr. | 1 | | ↓ | | 3 | | ↓ | | 5 | | 2 | | 4 | | 6 | | ↓ | | 0 |
| | | 25:21 | | 27:25 | | 25:21 | | 49:45 | | 27:25 | | 25:21 | | 49:45 | | 25:21 | | 27:25 | |

I – III: 9:7
I – IV: 75:49
I – V: 5:3
I – VI: 9:5
I – VII: 15:7
I – VIII: 7:3
I – IX: 25:9
I – X: 3:1

→ $\boxed{\text{„Moll I"}}$ „Δ"

I - VII - X
I - VI - X

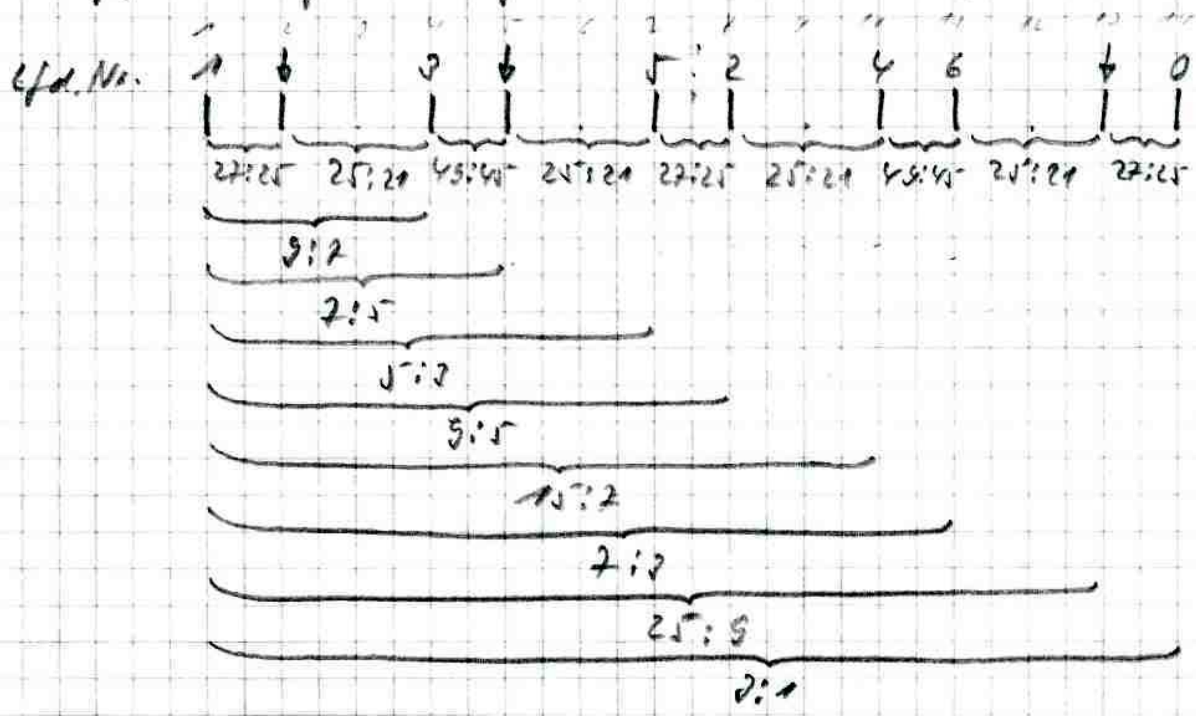
Kadenz: T $1 - \frac{5}{3} - \frac{7}{3}$

D $\frac{5}{3} - \frac{25}{9} - \frac{35}{27} (\approx \frac{9}{7})$

S $\frac{9}{7} - \frac{15}{7} - 3$

Ti - n - s
l - h - t
l - r - ti

Auffüllung analog zu „Dur II" ergibt




→ $\boxed{\text{„Moll II"}}$

Skala mit den einfachsten Zahlenverhältnissen, daher mögliche Ausgangsskala, andererseits spannungsarmer Aufbau.

I - V - VIII
I - VII - XI
I - IV - X

Kadenz: T $1 - \frac{5}{3} - \frac{7}{3}$

D $\frac{5}{3} - \frac{25}{9} - \frac{35}{27} \left(\approx \frac{9}{7}\right)$

S $\frac{9}{7} - \frac{15}{7} - 3$

Aufbau der Skalen, wenn in den Dur-Skalen ein Leitton durch Erhöhung des vorletzten Tons eingeführt wird

| | 1 | 27/25 | 25/21 | 9/7 | 7/5 | 75/49 | 5/3 | 9/5 | 49/25 | 15/7 | 7/3 | 63/25 | 25/9 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chrom. | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| | \| |
| „Dur I" | \| | \| | | \| | \| | | \| | \| | \| | | \| | | \| | \| |
| „Dur II" | \| | | \| | \| | \| | | \| | \| | | \| | \| | | \| | \| |
| „Moll I" | \| | | \| | \| | | \| | \| | \| | | \| | \| | | \| | \| |
| „Moll II" | \| | \| | | \| | \| | | \| | \| | | \| | \| | | \| | \| |

Drei-Ton-Akkorde

| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII | XIII | XIV |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I-V-VIII | \| | | | | \| | | | \| | | | | | | |
| I-VII-XI | \| | | | | | | \| | | | | \| | | | |
| I-IV-X | \| | | | \| | | | | | \| | | | | |

## Auswahl der diatonischen Skalen

1. „Dur I" – „Moll I"
   Spannung u. Differenzierung gut
   Akkordlage gut
2. „Dur II" – „Moll II"
   Spannung in „Moll II" nicht gut, Differenzierung gering
   Akkordlage ungünstig
3. „Dur I" – „Moll II"
   Spannung in „Moll II" nicht gut, Differenzierung gering
   Akkordlage in „Moll II" ungünstig
4. „Dur II" – „Moll I"
   Spannung gut, Differenzierung gering
   Akkordlage ungünstig in „Dur II"

Fazit

Entscheidung für „Dur I" – „Moll I", von hier an als Γ und Δ behandelt.

# Benennung der Töne

| Stufe | Schwingungsverhältnis rein | temperiert | | Γ | Δ | Name | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 = 1,0000 | 1,0000 | 0 | X | X | k | I |
| 1 | 27:25 = 1,0800 | 1,0882 | (4) | X | | l | |
| 2 | 25:21 = 1,1905 | 1,1841 | 8 | | X | mes | |
| 3 | 9:7 = 1,2857 | 1,2886 | 11 | X | X | m | |
| 4 | 7:5 = 1,4000 | 1,4022 | 15 | X | | n | V |
| 5 | 75:49 = 1,5306 | 1,5258 | 19 | | X | os | |
| 6 | 5:3 = $1,666\bar{6}$ | 1,6604 | 23 | X | X | o | VII |
| 7 | 9:5 = 1,8000 | 1,8068 | 26 | X | X | r | VIII |
| 8 | 49:25 = 1,9600 | 1,9661 | 30 | X | | s | |
| 9 | 15:7 = 2,1428 | 2,1395 | 3 | | X | tes | |
| 10 | 7:3 = $2,333\bar{3}$ | 2,3282 | 7 | X | X | t | XI |
| 11 | 63:25 = 2,5200 | 2,5335 | 10 | (X) | | tis | |
| 12 | 25:9 = 2,7777 | 2,7569 | 14 | X | X | u | |
| 13 | 3 = 3,0000 | 3,0000 | 18 | X | X | k | |

| | Cent |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 133 |
| 2 | 302 |
| 3 | 435 |
| 4 | 582 |
| 5 | 737 |
| 6 | 884 |
| 7 | 1035 |
| 8 | 1164 |
| 9 | 1319 |
| 10 | 1467 |
| 11 | 1600 |
| 12 | 1767 |
| 13 | 1902 |

Annäherung durch
$2^{\frac{n}{31}}$
(Huygens-Fokker) [3]
$\approx 3^{\frac{n}{49}}$

---

natürlich auch möglich mit
$2^{\frac{n}{53}}$
(Mercator-Helmholtz) [4]
$\approx 3^{\frac{n}{84}}$

---

oder mit $2^{\frac{n}{41}}$ (Janko)
$\approx 3^{\frac{n}{65}}$